101, 105, 106, 150, 151, 190

Théorème de Brauer :

Réf : Aucune.

Soit $n \geq 1$. A $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe $T_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j} \in Gl_n(K)$.

Soit K un corps

$T : \begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \to Gl_n(K) \\ \sigma \mapsto T_\sigma \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Théorème : σ et $\tilde{\sigma}$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ $\Leftrightarrow$ T_σ et $T_{\tilde{\sigma}}$ sont semblables dans $Gl_n(K)$.

démo :

- T est un morphisme : $T_\sigma . T_{\tilde{\sigma}} = (c_{ij})_{i,j}$ $c_{ij} = \sum_k \delta_{\sigma(i) k} \delta_{\tilde{\sigma}(k) j} = \delta_{\tilde{\sigma}\circ\sigma(i), j}$ $\Rightarrow T_\sigma . T_{\tilde{\sigma}} = T_{\tilde{\sigma}\sigma}$. et $T_{Id} = I_n$.

$\Rightarrow$ Ainsi, ~~conjugué~~ $\tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1} \Rightarrow T_{\tilde{\sigma}} = T_\tau . T_\sigma . (T_\tau)^{-1}$

$\Leftarrow$ On écrit $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_r$; $\tilde{\sigma} = \tilde{c}_1 \circ \dots \circ \tilde{c}_s$, décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
Pour c_i cycle, $l(c_i)$ = longueur de c_i.
$\forall k \geq 2$ $n_k = \#\{i \text{ tq } l(c_i) = k\}$, $\tilde{n}_k = \#\{i \text{ tq } l(\tilde{c}_i) = k\}$.

On va utiliser le Lemme : σ est conj à $\tilde{\sigma}$ dans $\mathfrak{S}_n \Leftrightarrow n_k = \tilde{n}_k$ $\forall k \geq 2$.

démo lemme : On a $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau c_1 \tau^{-1}) \dots (\tau c_r \tau^{-1})$

$\Rightarrow$ Pour $c_i = (a_{i,1} \dots a_{i,l(c_i)})$, $\tau c_i \tau^{-1} = (\tau(a_{i,1}) \dots \tau(a_{i,l(c_i)}))$, cycle de longueur $l(c_i)$. Donc la conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ préserve n_k.

$\Leftarrow$ On a une permutation τ tq $\tau(a_{i,j}) = l(c_1) + \dots + l(c_{i-1}) + j$, $\forall 1 \leq i \leq r$
$\forall 1 \leq j \leq l(c_i)$

car les $[\![1 ; l(c_1)]\!]$; $[\![l(c_1) + \dots + l(c_{i-1}) + 1 ; l(c_1) + \dots + l(c_i)]\!]$ sont disjoints et inclus dans $[\![1 ; n]\!]$
car $\sum_{i=1}^{r} l(c_i) = \sum_{k=2}^{n} k n_k \leq n$.

Donc si $n_k = \tilde{n}_k$, on a déjà $r = s = \sum_k n_k$. En réordonnant les $c_i, \tilde{c}_j$ par longueurs croissantes, on aura σ conjuguée à $(1 \dots l(c_1)) \dots (l(c_1) + \dots + l(c_{r-1}) + 1 \dots l(c_1) + \dots + l(c_r))$
$\tilde{\sigma}$ conjugué à $(1 \dots l(\tilde{c}_1)) \dots (l(\tilde{c}_1) + \dots + l(\tilde{c}_{r-1}) + 1 \dots l(\tilde{c}_1) + \dots + l(\tilde{c}_r))$

Donc σ conj à $\tilde{\sigma}$ □

On va donc montrer que si $T_\sigma \sim T_{\tilde{\sigma}}$, alors $n_k = \tilde{n}_k$, $\forall k \geq 0$.

Soit $e_1, \dots, e_n$ base canonique de K^n. $\forall i$, $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Donc T_σ agit sur $\{e_1, \dots, e_n\}$ transitivement.
les orbites de cette action sont données par les cycles c_i, on en a r. et les points fixes. On en a n_1.

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$. $T_\sigma(v) = v \Leftrightarrow v_i = v_{\sigma(i)}$, $\forall i$
$\Leftrightarrow$ les coeffs de v sont identiques sur chaque orbite de l'action de T_σ sur $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(T_\sigma - I_n)) = r + n_1$, avec $n_1 = n - \sum l(c_i)$, $\tilde{n}_1 = n - \sum l(\tilde{c}_i)$.

On a $A \in Gl_n(K)$ tq $A T_\sigma A^{-1} = T_{\tilde{\sigma}} \Rightarrow A(T_\sigma - I_n)A^{-1} = T_{\tilde{\sigma}} - I_n$ et $A(T_\sigma^k)A^{-1} = T_{\tilde{\sigma}}^k$. Donc $\forall k \geq 1$, $T_\sigma^k - I_n \sim T_{\tilde{\sigma}}^k - I_n$.

Donc $\forall k \geq 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(T_\sigma^k - I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(T_{\tilde{\sigma}}^k - I_n))$
$\|$ nb de cycles de σ^k + nb pts fixes à supp ≠ $\quad$ $\|$ nb de cycles de $\tilde{\sigma}^k$ + nb pts fixes à supp ≠.

* Lemme : $\dim(\mathrm{Ker}(T_\tau - I_n))$ = nb de pts fixes + nb de cycles de τ.
$\langle T_\tau \rangle$ agit sur $\{e_1, \dots, e_n\}$. On décompose $\{e_1, \dots, e_n\}$ en orbites : $\{e_1, \dots, e_n\} = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Orb}(e_i)$
Or, $T_\tau x = x \Leftrightarrow \forall i \in I, \forall j$ tq $e_j \in \mathrm{Orb}(e_i)$, $x_j = x_i$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(T_\tau - I_n))$ = nb d'orbites = nb cycles à supp ≠ + nb pts fixes

On a $\sigma^k = c_1^k \circ \dots \circ c_r^k$ car les c_i sont à support disjoint.

Soit c un cycle de longueur ℓ. Soit $k \geqslant 1$ et $d = \mathrm{pgcd}(\ell, k)$.

Alors c^k est un produit de d cycles de longueur $\frac{\ell}{d}$.

Donc σ^k possède $\sum_{u=1}^{n} n_u \times \mathrm{pgcd}(k, u)$ cycles et points fixes.

~~Chapter 2~~

~~Représentations linéaires des groupes finis~~

Donc, $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n$, $\sum_{u=1}^{n} \mathrm{pgcd}(k, u)\, n_u = \sum_{u=1}^{n} \mathrm{pgcd}(k, u)\, \tilde{n}_u$.

Posons $M = (a_{ij})_{ij}$, $a_{ij} = \mathrm{pgcd}(i,j)$. Alors $M\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix}$, $M \in M_n(\mathbb{Q})$.

Montrons que $M \in GL_n(\mathbb{Q})$.
Pour cela, posons
$D = \mathrm{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$, φ l'indicatrice d'Euler. D est inversible dans $M_n(\mathbb{Q})$

$A = (b_{ij})$ $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \mid i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ A est triangulaire supérieure, avec $b_{ii} = 1$, donc inversible dans $M_n(\mathbb{Q})$.

Calculons $AD\,{}^tA$: $D\,{}^tA = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ji}\varphi(i)$

$\Rightarrow (AD\,{}^tA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} b_{j,k} \varphi(k) = \sum_{k \mid \mathrm{pgcd}(i,j)} \varphi(k) = \mathrm{pgcd}(i,j) = (M)_{i,j}$.

Donc $AD\,{}^tA = M \Rightarrow M \in GL_n(\mathbb{Q})$, et $\det(M) = \varphi(1) \dots \varphi(n)$.

Ainsi, comme M inversible, $n_k = \tilde{n}_k$ $\forall k \geqslant 1$, donc σ conj à $\tilde{\sigma}$ dans $\mathfrak{S}_n$. $\square$